UNIVERSITÉ D'ÉBOLOWA
ISABEE
Niveau 1- Semestre 1 : 2023-2024
Filières : AESH, ARCH, ERPE, FSTB, GH, GR, HSTE, MC, SE
Durée : 01h30min

CONTRÔLE CONTINU D'INTRODUCTION À L'ANALYSE (ANA 111)

Sur 20 pts

Exercice 1 (10 pts)

1. Démontrer par l'absurde que le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel. [1+1+2+1 = 5pts]
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente en utilisant la définition d'une suite de Cauchy. [1x5 = 5pts]

Exercice 2 (10 pts)

1. Soit f_n la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^{2n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée d'ordre m de $f_n(x)$ (avec $m \in \mathbb{N}$). $[0^{5}+1+1+2^{5}=5$ pts$]$ ou $[1^{5}+1^{5}+2=5$ pts$]$
2. On tire un objet de poids P sur un plan horizontal à l'aide d'une corde à laquelle est appliquée une force. Si θ désigne l'angle que fait la corde avec le plan, alors, à la limite de glissement, l'intensité de la force est donnée par

$$F = \frac{\mu P}{\mu \sin(\theta) + \cos(\theta)}$$

   où μ est une constante positive appelée coefficient de friction et où $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Démontrer que F est minimale lorsque $\tan(\theta) = \mu$. [2+1+1+1 = 5pts]

UNIVERSITÉ D'ÉBOLOWA
ISABEE
Niveau 1- Semestre 1 : 2023-2024
Filières : AESH, ARCH, ERPE, FSTB, GH, GR, HSTE, MC, SE
Durée : 01h30min

CONTRÔLE CONTINU D'INTRODUCTION À L'ANALYSE (ANA 111)

Exercice 1 (10 pts)

1. Démontrer par l'absurde que le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente en utilisant la définition d'une suite de Cauchy.

Exercice 2 (10 pts)

1. Soit f_n la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^{2n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée d'ordre m de $f_n(x)$ (avec $m \in \mathbb{N}$).
2. On tire un objet de poids P sur un plan horizontal à l'aide d'une corde à laquelle est appliquée une force. Si θ désigne l'angle que fait la corde avec le plan, alors, à la limite de glissement, l'intensité de la force est donnée par

$$F = \frac{\mu P}{\mu \sin(\theta) + \cos(\theta)}$$

   où μ est une constante positive appelée coefficient de friction et où $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Démontrer que F est minimale lorsque $\tan(\theta) = \mu$.

Université d'Ebolowa

ISABEE

Tronc Commun - Niveau 1

Semestre 1 : 2023-2024

Correction du CC d'Introduction à l'Analyse (ANA111)

Sur 20 points

Exercice 1 [10 pts]

1) Démontrons par l'absurde que le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Soient $x \in \mathbb{Q}^*$ et $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Supposons que $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ et montrons que c'est contradictoire. [1 pt]

$$\frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \iff \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z}^* \text{ et } b \in \mathbb{N}^*. \text{ [1 pt]}$$

$$\iff x = \frac{a}{b}\cdot y$$

$$\iff y = x\cdot\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}^* \text{ car } x \in \mathbb{Q}^* \text{ et } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^* \text{ donc } \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}^*.$$

Ce qui est contradictoire car $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. [2 pts]

Donc la somme d'un rationnel non nul et d'un nombre irrationne
est un nombre irrationnel. [1 pt]

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots$

Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente en utilisant la défi-
nition d'une suite de Cauchy.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dite de Cauchy si et seulement si

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, (n \geq N \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon)$. [1 pt]

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, cherchons $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n, p \in \mathbb{N}^* (n \geq N \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On a : $|u_{n+p} - u_n| = \left|1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right.\right.$

$$= \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}\right|$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \quad \text{car } n \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathbb{N}^*$$

$$\leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad \text{[1 pt]}$$

Car, en effet, $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$; $\frac{1}{(n+2)^2} \leq \frac{1}{n^2}$; $\cdots$; $\frac{1}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$

Ainsi, $|U_{n+p} - U_n| \leq n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$ [1 pt]

On a :

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow |U_{n+p} - U_n| < \varepsilon$$
$$n\varepsilon > 1 \Rightarrow |U_{n+p} - U_n| < \varepsilon$$
$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |U_{n+p} - U_n| < \varepsilon$$
$$n \geq E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 \Rightarrow |U_{n+p} - U_n| < \varepsilon. \quad [1\ pt]$$

Il suffit donc de prendre $N = N(\varepsilon) = \overbrace{E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1}^{[1\ pt]} \in \mathbb{N}$ (car $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$).

D'où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy. Puisque $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy, on conclut q
est convergente.

Exercice 2 [10 pts]

1) Soit f_n la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^{2n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$

Calculons la dérivée d'ordre m de $f_n(x)$ (avec $m \in \mathbb{N}$).

La fonction f est m fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives sont définies par :

$$f'_n(x) = 2n\, x^{2n-1} \quad [0^5\ pt]$$
$$f''_n(x) = 2n(2n-1) \cdot x^{2n-2}$$
$$f'''_n(x) = 2n(2n-1)(2n-2)\, x^{2n-3} \quad [1\ pt]$$
$$\vdots$$
$$f^{(m)}_n(x) = 2n(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-m+1)\, x^{2n-m} \quad [1\ pt]$$

D'où $$f^{(m)}_n(x) = \frac{(2n)!}{(2n-m)!}\, x^{2n-m} \quad [2^5\ pts]$$

2ème méthode

On a d'après la formule de Leibniz

$$\left(x^{2n}\right)^{(m)} = \left(x^n \times x^n\right)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(x^n\right)^{(k)} \left(x^n\right)^{(m-k)} \quad [1^5\ pt]$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \cdot \frac{n!}{[n-(m-k)]!} x^{n-(m-k)} \qquad \text{car } \left(x^n\right)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{n!}{[n-(m-k)]!} \cdot x^{2n-m} \quad [1^5\ pt] \qquad \text{et } \left(x^n\right)^{(m-k)} = \frac{n!}{[n-(m-k)]!}$$

D'où $$\left(x^{2n}\right)^{(m)} = x^{2n-m} \sum_{k=0}^{m} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{n!}{[n-(m-k)]!} \quad [2\ pts]$$

2) On donne $F = \dfrac{\mu P}{\mu \sin(\theta) + \cos(\theta)}$.

Démontrons que F est minimale lorsque $\tan(\theta) = \mu$, où $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

F est continue et dérivable sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ et sa dérivée est définie par

$$F' = \frac{-\mu P\left(\mu \cos(\theta) - \sin(\theta)\right)}{\left[\mu \sin(\theta) + \cos(\theta)\right]^2} = \frac{-P\mu^2 \cos(\theta) + \mu P \sin(\theta)}{\left[\mu \sin(\theta) + \cos(\theta)\right]^2} \quad [2 \text{ pts}]$$

$$F' = 0 \iff -P\mu^2 \cos(\theta) + \mu P \sin(\theta) = 0 \quad \text{car } \left[\mu \sin(\theta) + \cos(\theta)\right]^2 >$$

$$\iff P\mu\left(-\mu \cos(\theta) + \sin(\theta)\right) = 0 \quad [1 \text{ pt}]$$

$$\Rightarrow -\mu \cos(\theta) + \sin(\theta) = 0 \quad \text{, car } P > 0, \mu > 0 \text{ et donc } P\mu > 0$$

$$\iff -\mu = -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$\iff \tan(\theta) = \mu. \quad [1 \text{ pt}]$$

F est minimale lorsque $F' = 0$, c'est-à-dire $\tan(\theta) = \mu$. [1 pt