UNIVERSITÉ D'ÉBOLOWA

ISABEE

Niveau 1- Semestre 2 : 2022-2023

AESH, ARCH, ERPE, FSTB, GH, GR, HSTE, MC, SE

Durée : 2h30min

Barème sur 22 points mais note finale sur 20 points.

EXAMEN D'ANALYSE 2

Exercice 1 ~~(5 pts)~~ [5,5 pts]

1. On pose : $f(t) = 1$ et $g(t) = \frac{1}{t}$. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$,

$$\ln(x) \leq \sqrt{x-1}.$$ [2,75 pts]

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle de terme général :

$$u_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

En utilisant les sommes de Riemann, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. [2,75 pts]

Exercice 2 ~~(5 pts).~~ [5,5 pts]

1. On donne la fonction rationnelle f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{3x^2+x^4}$.
   (a) Décomposer $f(x)$ en éléments simples. [1 pt]
   (b) En déduire le calcul de la primitive suivante : $I_1 = \int f(x)\,dx$. [1,75 pts]

2. En posant le changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - x$, calculer l'intégrale suivante :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,dx.$$ [2,75 pts]

Exercice 3 ~~(5 pts)~~ [5,5 pts]

1. Etudier la convergence de l'intégrale généralisée :

$$J_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt.$$ [2,75 pts]

2. À l'aide de l'intégrale généralisée de Riemann, étudier la convergence de l'intégrale généralisée :

$$J_2 = \int_2^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t^2}\,dt.$$ [2,75 pts]

Exercice 4 ~~(5 pts)~~ [5,5 pts]

1. Définir : Équation différentielle ordinaire de type Bernoulli. [1 pt]
2. Résoudre l'équation différentielle ordinaire du 1^{er} ordre suivante :

$$(E) : y' = y(xy^3 - 1).$$ [4,5 pts]

Université d'Ebolowa

ISABEE

Tronc Commun : Niveau 1

Semestre 2 : 2022-2023

Correction de l'Examen d'Analyse 2

Barème sur 22 points mais note finale sur 20 points

Exercice 1 [5,5 pts]

1) On pose $f(t)=1$ et $g(t)=\frac{1}{t}$. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrons que $\forall x \in [1;+\infty[$, $\ln(x) \leq \sqrt{x-1}$.

f et g sont deux fonctions continues sur $[1;+\infty[$.

Soit $x \in [1;+\infty]$. On a : f, g sont continues sur $[1,x]$ donc continues par morceaux sur $[1;x]$. Ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwar

$$\left(\int_1^x f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_1^x f^2(t)dt \times \int_1^x g^2(t)dt \quad [1 \text{ pt}]$$

$$\iff \left(\int_1^x 1\times\frac{1}{t}\,dt\right)^2 \leq \int_1^x 1^2 dt \times \int_1^x \left(\frac{1}{t}\right)^2 dt$$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \sqrt{\int_1^x dt \times \int_1^x \frac{dt}{t^2}} \quad [0^{75} \text{pt}]$$

$$\iff \Big[\ln(t)\Big]_1^x \leq \sqrt{(x-1)\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x}$$

$$\iff \ln(x)-\ln(1) \leq \sqrt{(x-1)\left(-\frac{1}{x}+1\right)}$$

[1 pt]

$$\ln(x) \leq \sqrt{(x-1)\frac{(x-1)}{x}} \leq \sqrt{\frac{(x-1)(x-1)}{x-1}}$$ car pour $x\in[1,+\infty[$, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x-1}$

et donc $\frac{(x-1)(x-1)}{x} \leq \frac{(x-1)(x-1)}{x-1}$

D'où $\ln(x) \leq \sqrt{x-1}$, $\forall x \in [1,+\infty[$.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle de terme général $u_n=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

En utilisant les sommes de Riemann, calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et $\ln(u_n) = \ln\left[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})\right]^{\frac{1}{n}}$

$$= \ln\left[\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \quad [1\,pt]$$

$$= \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})$$

$$= \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+\frac{k(1-0)}{n}\right)$$

$$= \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \quad [0^{75}pt]$$

$\ln(u_n)$ définie une somme de Riemann pour la fonction continue f sur $[0;1]$ défine par $f(x) = \ln(1+x)$ (avec $a=0$ et $b=1$).

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left[x\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 2\ln(2) - 1 \quad [0^5 pt]$$

$$[0^5 pt]$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln(u_n)} = e^{2\ln(2)-1} = e^{\ln(2^2)-1} = \frac{e^{\ln(2^2)}}{e} = \frac{4}{e}$.

Exercice 2 [5,5 pts]

1) On donne la fonction rationnelle f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{3x^2+x^4}$

(a) Décomposons $f(x)$ en éléments simples.

On a : $f(x) = \frac{1}{3x^2+x^4} = \frac{1}{x^2(3+x^2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3+x^2}\right)$

D'où $f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3+x^2}\right)$ [1 pt]

(b) Déduisons-en le calcul de la primitive $I_1 = \int f(x)dx$

On a : $I_1 = \int f(x)dx = \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3+x^2}\right)dx = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{1+(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}\right]$

D'où $I_1 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right) + c$, $c \in \mathbb{R}$ [1^{75}pt]

2) En posant le changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - x$, calculons l'intégrale ③

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,dx$.

On a : $u = \frac{\pi}{4} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - u \Rightarrow \tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right) = \frac{1-\tan(u)}{1+\tan(u)}$

$dx = -du$.

car $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Pour $x = 0$, $u = \frac{\pi}{4}$ et pour $x = \frac{\pi}{4}$, $u = 0$.

Ainsi, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1 + \frac{1-\tan(u)}{1+\tan(u)}\right) du$ [1pt]

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan(u)}\right) du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln(2) - \ln(1+\tan(u))\right] du \quad [0^{75}\text{pt}]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2)\,du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(u))\,du$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2)\,du - I_2 \quad [0^5\text{pt}]$$

$$2I_2 = \frac{\pi}{4}\ln(2)$$

D'où $I_2 = \frac{\pi}{8}\ln(2)$ [0^5pt]

Exercice 3 [5,5 pts]

1) Étudions la convergence de l'intégrale généralisée : $J_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\,dt$.

Le problème de la convergence se pose en $+\infty$.

Posons $f(t) = \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}$.

Soit $x \in [1, +\infty[$. f est intégrable au sens de Riemann sur $[1, x]$ car f est continue sur $[1, x]$.

Posons $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$. [$0^5$pt]

Posons le changement de variable $z = \sqrt{t^2+1} \Rightarrow z^2 = t^2+1 \Leftrightarrow t^2 = z^2 - 1$

$\Rightarrow t = \sqrt{z^2-1}$

$2t\,dt = 2z\,dz \iff dt = \frac{z}{t}dz$

Pour $t=1$, $z=\sqrt{2}$ et pour $t=x$, $z=\sqrt{x^2+1}$.

Ainsi, $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \times \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \times \frac{1}{z}\,dz = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} \frac{1}{z^2-1}\,dz$ [0,75 pt]

$F(x) = -\left[\operatorname{argth}(z)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}} = -\operatorname{argth}(\sqrt{2}) - \operatorname{argth}(\sqrt{x^2+1})$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = J_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{argth}(\sqrt{2}) - \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{argth}(\sqrt{x^2+1})$ [0,75 pt]

$= \operatorname{argth}(\sqrt{2}) - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}}\right)$

$= \operatorname{argth}(\sqrt{2}) \in \mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}}\right) = 0$ [0,75 pt]

D'où J_1 est convergente.

<u>$2^{ème}$ méthode</u> (cette méthode, plus courte est également valable!)

$J_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$. Posons $f(t) = \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}$

On a : $\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ car, en effet, $\sqrt{t^2+1} \simeq \sqrt{t^2} = t$ lorsque $t \to +\infty$

Ainsi, J_1 est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ qui est une intégrale généralisée de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$.

D'où $J_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$ est convergente. [2,75 pt]

2) À l'aide de l'intégrale généralisée de Riemann, étudions la convergence de l'intégrale généralisée : $J_2 = \int_2^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t^2}\,dt$.

On a : $\forall t \in [2; +\infty[$, $0 \leq \frac{|\cos(t)|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ car $|\cos(t)| \leq 1$ [1 pt]

Or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est une intégrale généralisée convergente car $\alpha = 2 > 1$. [0,75 pt]

Donc $J_2 = \int_2^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t^2}\,dt$ est convergente car elle est positive est inférieure à une intégrale généralisée convergente. [1 pt] ⑤

Exercice 4 [5,5 pts]

1) Définissons : Équation différentielle ordinaire de type Bernoulli.
C'est une équation différentielle ordinaire du 1^{er} ordre qui peut se mettre sous la forme $(E) : a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x)\,y^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ où a, b et f sont des fonctions données. [1 pt]

2) Résolvons l'équation différentielle ordinaire du 1^{er} ordre suivante :
$(E) : y' = y\,(xy^3 - 1)$

On a : $(E)\quad y' = xy^4 - y \iff y' + y = xy^4$ qui est une équation différentielle de type Bernoulli [1 pt] avec $a(x) = 1$, $b(x) = 1$, $f(x) = x$ et $\alpha = 4$.
Le changement de variable qui convient est : $z = y^{1-\alpha} = y^{1-4} = y^{-3}$ (1) [0,5 pt]
En divisant (E) par $y^4 = y^{\alpha}$ on obtient :

$$\frac{y'}{y^4} + \frac{y}{y^4} = \frac{xy^4}{y^4} \iff y'y^{-4} + y^{-3} = x \iff \frac{1}{-3}z' + z = x \quad \text{car } z = y^{-3} \text{ et } z' = -3y'y^{-4}$$ [1 pt]

En multipliant par -3, on obtient $(E') : z' - 3z = -3x$ qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

- Solution générale de l'équation homogène $z' - 3z = 0$
  L'équation différentielle homogène associée à $(E') : z' - 3z = 0$ est $z_h = ke^{3x}$, $k \in \mathbb{R}$ [0,5 pt]
- Solution particulière de $(E') : z' - 3z = -3x$ par la méthode de la variation de la constante.

On a : $\quad z_p = K(x)e^{3x}$ (2) $\Rightarrow z_p' = K'(x)e^{3x} + 3K(x)e^{3x}$ (3).

En remplaçant (2) et (3) dans (E'), on obtient :

$$K'(x)e^{3x} + 3K(x)e^{3x} - 3K(x)e^{3x} = -3x \iff K'(x) = -3(x)e^{-3x} \Rightarrow K(x) = \int -3xe^{-3x}\,dx = e^{-3x}\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

Donc $z_p = e^{-3(x)}\left(x + \frac{1}{3}\right)e^{3x} = x + \frac{1}{3}$ ← [0,5 pt]

D'où $\quad z = z_h + z_p = ke^{3x} + x + \frac{1}{3}$, $k \in \mathbb{R}$ ← [0,5 pt]

Puisque d'après (1), $z = y^{-3} \iff y = z^{-\frac{1}{3}}$, on conclut que

$$y = \left(ke^{3x} + x + \frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$ [0,5 pt]