Université de Maroua
ENSPM
ESB 2-Groupe A/MCHP/AHN

Dr. GUIEM Richard
Durée : 1h30
Semestre 1 : 2022-2023

MATHÉMATIQUES POUR INGÉNIEUR 1 (ESB 111)

Partie : Analyse 1 (20 points)

Exercice 1 (10 pts)

1. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par : $A = \left\{ \dfrac{x^n}{x^n+1} : x \in \mathbb{R}_+^*,\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Calculer, si elles existent, $\sup(A)$ et $\inf(A)$. [3^5 pt
2. Soit z un nombre complexe de module r et d'argument θ. Calculer $(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)\cdots(z^n+\bar{z}^n)$ en fonction de r et θ. [2^5 pt
3. Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$. En utilisant la définition d'une suite de Cauchy, démontrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. [4 pt

Exercice 2 (10 pts)

1. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{(1-\cos(x))} - e^{\sin(x)}}{\tan(x)}$. [4 pts]
2. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\arcsin(x^2)}{x}$. Etudier le prolongement par continuité de la fonction f sur $[-1, 1]$. [2^5 pt
3. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2 + 3x + 4x^2 + x^3 \sin(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0 \\ 2, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que g admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre 2, et que, pourtant, $g''(0)$ n'existe pas. [3^5 pts]

Université de Maroua
Ecole Nationale Supérieure Polytechnique
Département d'Enseignement Scientifique de Base

Dr Pecha
IC1 Grpe A/ MCHP-2022/2023
Durée : 1h30

EXAMEN D'ALGÈBRE GÉNÉRALE

Exercice 1 (4 pts)

On considère dans $\mathbb{R}^4$, le sous ensemble F défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - z = 0 \;\; x - y + 2t = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de F.
3. Déduire sa dimension.

Exercice 2 (6 pts)

Soit l'ensemble des parties d'un ensemble à deux éléments, par exemple $E = \mathcal{P}(\{0,1\})$ donc

$$E = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$$

On considère la loi de composition $* : \begin{array}{ccc} E \times E & \mapsto & E \\ (A,B) & \mapsto & \bar{A} \cup \bar{B} \end{array}$.

1. Ecrire la table de composition de la loi * .
2. L'ensemble possède-t-il un élément neutre pour la loi * ?
3. La loi * est-elle associative ?
4. La loi * est-elle commutative ?
5. L'ensemble E muni de la loi * est-il un groupe ?

Correction Examen d'Analyse 1

ESB 1- Groupe A / Mc / AHN1

2022 - 2023

Sur 20 points

Exercice 1 [10 pts]

1) Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par : $A = \left\{ \frac{x^n}{x^n+1} : x \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Calculons, si elles existent, $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

• Montrons que A est une partie non vide de $\mathbb{R}$. [0^5 pt]

Soient $x = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $n = 0 \in \mathbb{N}$. On a : $\frac{1^0}{1^0+1} = \frac{1}{2} \in A$. D'où $A \neq \emptyset$.

• Existence et calcul de $\sup(A)$. [$0^{75} \times 2 = 1^5$ pt]

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a : $\frac{x^n}{x^n+1} \leq \frac{x^n+1}{x^n+1} = 1$ car $x^n \leq x^n + 1$

Ainsi, A est majoré par 1 dans $\mathbb{R}$. D'après l'axiome de la borne supérieure, $\sup(A)$ existe car A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{x^n+1} = 1$. D'après ce qui précède, 1 est un majorant de A dans $\mathbb{R}$. Puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{x^n+1} = 1$, alors $\sup(A) = 1$.

• Existence et calcul de $\inf(A)$. [$0^{75} \times 2 = 1^5$ pt]

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a : $x^n + 1 > x^n > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^n+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^n}{x^n+1} > 0$.

Ainsi, A est minoré par 0 dans $\mathbb{R}$. D'après l'axiome de la borne inférieure, $\inf(A)$ existe car A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^n}{x^n+1} = 0$. D'après ce qui précède, 0 est un minorant de A dans $\mathbb{R}$. Puisque $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^n}{x^n+1} = 0$, alors $\inf(A) = 0$.

2) Soit z un nombre complexe de module r et d'argument θ.

Calculons $(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)\cdots(z^n+\bar{z}^n)$ en fonction de r et θ.

L'écriture de z sous la forme exponentielle est : $z = re^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$.

Ainsi, $(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)\cdots(z^n+\bar{z}^n) = \prod_{k=1}^{n} (z^k + \bar{z}^k)$ [0^5 pt]

$$= \prod_{k=1}^{n} \left[(re^{i\theta})^k + (re^{-i\theta})^k \right]$$

$$(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)\cdots(z^n+\bar{z}^n) = \prod_{k=1}^{n} r^k\left(e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}\right) \quad [0^5 pt]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} r^k 2\cos(k\theta) \quad \text{car} \quad \cos(k\theta) = \frac{e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}}{2}$$

$$= 2^n \prod_{k=1}^{n} r^k \cos(k\theta) \quad [1^5 pt]$$

$$= 2^n \prod_{k=1}^{n} r^k \cdot \prod_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$$

D'où $(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)\cdots(z^n+\bar{z}^n) = 2^n r^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n}\cos(k\theta)$ car $\prod_{k=1}^{n} r^k = r^1 \times r^2 \times \cdots \times r^n = r^{1+2+\cdots+n} = r^{\frac{n(n+1)}{2}}$

3) Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $u_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=1+\frac{1}{u_n}$.
En utilisant la définition d'une suite de Cauchy, démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, cherchons $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \;/\; \forall n,p\in\mathbb{N}\;(n\geq N \Rightarrow |u_{n+p}-u_n|<\varepsilon)$. [1pt]

Soient $n,p\in\mathbb{N}$. On a : $|u_{n+p}-u_n| = |(u_{n+p}-u_{n+p-1})+(u_{n+p-1}-u_{n+p-2})+\cdots+(u_{n+1}-u_n)|$

$$\leq |u_{n+p}-u_{n+p-1}|+|u_{n+p-1}-u_{n+p-2}|+\cdots+|u_{n+1}-u_n|$$

$$|u_{n+p}-u_n| \leq \sum_{k=1}^{p}|u_{n+k}-u_{n+k-1}| = \sum_{k=n}^{n+p-1}|u_{k+1}-u_k|$$

- On démontre aisément par récurrence que $u_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle positive. (Cf correction CC d'Analyse 1, 22-23)
- $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1+\frac{1}{u_n}>1$, car $u_n>0$. Or $u_0=2>1$, donc $u_n>1, \forall n\in\mathbb{N}$.
- Démontrons que $\forall k\in\mathbb{N}$, $|u_{k+1}-u_k|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^k$ [1 pt]

En raisonnant par récurrence sur k, on a :

Pour $k=0$, on a : $|u_1-u_0| = \left|1+\frac{1}{u_0}-u_0\right| = \left|1+\frac{1}{2}-2\right| = \frac{1}{2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

Supposons que pour $k\in\mathbb{N}$ fixé, $|u_{k+1}-u_k|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^k$ est vraie et montrons que $|u_{k+2}-u_{k+1}|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

On a : $|u_{k+2}-u_{k+1}| = \left|1+\frac{1}{u_{k+1}}-u_{k+1}\right| = \left|\frac{1+u_{k+1}-u_{k+1}^2}{u_{k+1}}\right|$

$$|u_{k+2}-u_{k+1}| = \left|\frac{1+\left(1+\frac{1}{u_k}\right)-\left(1+\frac{1}{u_k}\right)^2}{1+\frac{1}{u_k}}\right|$$ car par définition $u_{k+1}=1+\frac{1}{u_k}$ et donc $u_{k+2}=1+\frac{1}{u_{k+1}}$

$$= \left|\frac{1-\frac{1}{u_k}-\frac{1}{u_k^2}}{1+\frac{1}{u_k}}\right|$$

$$|u_{k+2}-u_{k+1}| = \left|\frac{u_k^2-u_k-1}{u_k^2\left(1+\frac{1}{u_k}\right)}\right| = \left|\frac{u_k^2-u_k-1}{u_k}\right| \times \left|\frac{1}{u_k\left(1+\frac{1}{u_k}\right)}\right|$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $|u_{k+1}-u_k| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \Leftrightarrow \left|1+\frac{1}{u_k}-u_k\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{u_k^2-u_k-1}{u_k}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Ainsi, $|u_{k+2}-u_{k+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left|\frac{1}{u_k\left(1+\frac{1}{u_k}\right)}\right|$ car $\left|\frac{u_k^2-u_k-1}{u_k}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$|u_{k+2}-u_{k+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

car $u_k\left(1+\frac{1}{u_k}\right) \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{u_k\left(1+\frac{1}{u_k}\right)} \leq \frac{1}{2}$

En effet, $u_k\left(1+\frac{1}{u_k}\right) = u_k+1 \geq 2$ car $u_k \geq 1, \forall k \in \mathbb{N}$

D'où, $\forall k \in \mathbb{N}$, $|u_{k+1}-u_k| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Par conséquent, $|u_{n+p}-u_n| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |u_{k+1}-u_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ qui est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Ainsi, $|u_{n+p}-u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+p}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+p}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ car $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+p} \leq 1$

[1pt]

On a : $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \varepsilon \Rightarrow |u_{n+p}-u_n| < \varepsilon$

$(n-1)\ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln(\varepsilon) \Rightarrow |u_{n+p}-u_n| < \varepsilon$

$n-1 > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow |u_{n+p}-u_n| < \varepsilon$

$n > \frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} \Rightarrow |u_{n+p}-u_n| < \varepsilon$

$n \geq E\left(-\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}\right)+1 \Rightarrow |u_{n+p}-u_n| < \varepsilon$

Il suffit donc de prendre $N = N(\varepsilon) = \max\left(0 ; E\left(-\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}\right)+1\right) \in \mathbb{N}$.

[1pt]

Exercice 2 [10 pts]

1) Calculons $\lim_{x \to 0} \frac{e^{1-\cos(x)} - e^{\sin(x)}}{\tan(x)}$

D'après la formule de Taylor-Young, les développements limités de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrivent. [$0{,}5 \times 4 = 2$pts]

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \theta(x^2) \Leftrightarrow 1-\cos(x) = \frac{x^2}{2} + \theta(x^2)$; $\sin(x) = x + \theta(x^2)$ et

$\tan(x) = x + \theta(x^2)$; $e^X = 1 + X + \theta(X) \Rightarrow e^{1-\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \theta(x^2)$ et $e^{\sin(x)} = 1 + x + \theta(x^2)$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{1-\cos(x)} - e^{\sin(x)}}{\tan(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left[1+\frac{x^2}{2}+\theta(x^2)\right]-\left[1+x+\theta(x^2)\right]}{x+\theta(x^2)}$ [1pt]

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2}-x}{x}$

D'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{1-\cos(x)} - e^{\sin(x)}}{\tan(x)} = -1$ car $\dfrac{\frac{x^2}{2}-x}{x} = \dfrac{x\left(\frac{x}{2}-1\right)}{x} = \dfrac{x}{2}-1$

[1pt]

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\arcsin(x^2)}{x}$.

Étudions le prolongement par continuité de la fonction f sur $[-1;1]$.

Soit $x \in [-1,1]$. $x \in D_f \iff x \neq 0 \iff D_f = [-1;0[\cup]0;1]$. [$0^5$pt]

Ainsi, $0 \notin D_f$. Mais $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x^2)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin(x^2)}{x^2} \times \dfrac{x^2}{x} = 0$

car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x^2)}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$. [$1^5$pt]

D'où f est prolongeable par continuité et son prolongement par continuité est la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. [$0^5$pt]

3) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} 2+3x+4x^2+x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 2, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On a : $D_g = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = 2+3x+4x^2+x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est l'expression d'une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$ comme somme, produit et composée de fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$. [1pt]

Pour $x=0$, $g(x) = 2$. Donc g admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0. [0^5pt]

On a : $g'(x) = \begin{cases} 3+8x+3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g'(x)-g'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3+8x+3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{x}+8+3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas mais $\lim\limits_{x\to 0} 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. [2pts]

D'où $g''(0)$ n'existe pas.