UNIVERSITÉ D'ÉBOLOWA
ISABEE
Semestre 1 - Niveau 1 : 2023-2024
Filières : AESH, ARCH, ERPE, FSTB, GH, GR, HSTE, MC, SE
Durée : 1h30min

EXAMEN DE SESSION NORMALE D'ANALYSE ET ALGÈBRE
PARTIE : INTRODUCTION À L'ANALYSE (ANA 111)

Exercice 1 (8,5 pts)

1. Démontrer que pour tout x, $y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x+y|$. [2,5 pts]
2. En utilisant la définition de la convergence d'une suite réelle, étudier la convergence de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $u_n = \dfrac{\sqrt{n(2n+1)}}{n+3}$. [3 pts]
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle de terme général : $v_n = \dfrac{[E(\sqrt{n})]^2}{n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite. [3 pts]

Exercice 2 (11,5 pts)

1. Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$. [3,5 pts]
2. Calculer la dérivée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) de la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = \sin(x)e^{kx}$, $k \in \mathbb{N}$. [3,5 pts]
3. Soit g la fonction réelle définie par : $g(x) = \cos(\arctan(x))$.
   (a) Déterminer D_g, le domaine de définition de g. [1 pt]
   (b) Simplifier $g(x)$. [3,5 pts]

UNIVERSITY OF EBOLOWA
ISABEE
1^{st} Semester - Level 1 : 2023-2024
Fields of study : AESH, ARCH, ERPE, FSTB, GH, GR, HSTE, MC, SE
Duration : 1h30min

EXAMINATION PAPER : ANALYSIS AND ALGEBRA
INTRODUCTION TO REAL ANALYSIS (ANA 111)

Exercise 1 (8,5 marks)

1. Show that for all x, $y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x+y|$.
2. Prove the convergence or divergence of the sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by $u_n = \dfrac{\sqrt{n(2n+1)}}{n+3}$, by making use of the definition of the convergence of real sequences.
3. Let $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ be the sequence of general term : $v_n = \dfrac{[E(\sqrt{n})]^2}{n}$. Show that the sequence $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converges and calculate its limit.

Exercise 2 (11,5 marks)

1. Calculate the following limit : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.
2. Calculate the derivative of order n ($n \in \mathbb{N}^*$) of the function f_k defined on $\mathbb{R}$ by : $f_k(x) = \sin(x)e^{kx}$, $k \in \mathbb{N}$.
3. Let g be a real function defined by : $g(x) = \cos(\arctan(x))$.
   (a) Determine D_g, the domain of definition of g.
   (b) Simplify $g(x)$.

Université d'Ebolowa

ISABEE

Tronc Commun - Niveau 1

Semestre 1 : 2023-2024

Correction de l'Examen d'Introduction à l'Analyse (ANA111)

Sur 20 points

Exercice 1 [8,5 pts]

1) Démontrons que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $||x|-|y|| \leq |x+y|$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a : $|x| = |x+y-y| = |x+y+(-y)|$

$|x| \leq |x+y| + |-y|$ d'après l'inégalité triangulaire

$|x| \leq |x+y| + |y|$ car $|-y| = |y|$

$|x| - |y| \leq |x+y|$ (*) [1 pt]

De même, on a : $|y| = |y+x-x| = |y+x+(-x)|$

$|y| \leq |y+x| + |-x|$ d'après l'inégalité triangulaire

$|y| \leq |x+y| + |x|$ car $|y+x| = |x+y|$ et $|-x| = |x|$

$-(|x|-|y|) \leq |x+y|$ (**) [1 pt]

D'après (*) et (**), on a : $-|x+y| \leq |x|-|y| \leq |x+y|$

D'où $||x|-|y|| \leq |x+y|$. [0,5 pt]

2ème méthode

On a d'après l'inégalité triangulaire renversée $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

En remplaçant y par $-y$, on obtient : $||x|-|-y|| \leq |x-(-y)|$ [2,5 pts]

D'où $||x|-|y|| \leq |x+y|$

2) En utilisant la définition de la convergence d'une suite réelle, étudions la convergence de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $u_n = \dfrac{\sqrt{n(2n+1)}}{n+3}$.

(*) Déterminons l

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n(2n+1)}}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2n^2+n}}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\sqrt{2+\frac{1}{n}}}{n} = \sqrt{2}$

D'où $l = \sqrt{2}$. [0,5 pt]

[1pt] (**) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, cherchons $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ / $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $|u_n - l| = |u_n - \sqrt{2}| = \left|\dfrac{\sqrt{n(2n+1)}}{n} - \sqrt{2}\right| = \left|\dfrac{n\sqrt{2+\frac{1}{n}}}{n} - \sqrt{2}\right|$

$|u_n - \sqrt{2}| = \left|\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{2}$ car $\sqrt{2+\frac{1}{n}} > \sqrt{2}$

$|u_n - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2+\frac{1}{n}}$ car $\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{2} \leq \sqrt{2+\frac{1}{n}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $\sqrt{2+\frac{1}{n}} < \varepsilon \Rightarrow |u_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow 2+\frac{1}{n} < \varepsilon^2 \Rightarrow |u_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$ [1 pt]

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon^2 - 2 \Rightarrow |u_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2 - 2} \Rightarrow |u_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$, avec $\varepsilon^2 \neq 2 \Leftrightarrow \varepsilon \neq \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow n \geq E\left(\frac{1}{\varepsilon^2 - 2}\right) + 1 \Rightarrow |u_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$

Il suffit donc de prendre $N = N(\varepsilon) = E\left(\frac{1}{\varepsilon^2-2}\right) + 1 \in \mathbb{N}$. [0^5 pt]

D'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle de terme général : $v_n = \frac{[E(\sqrt{n})]^2}{n}$.

Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminons sa limite l.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la partie entière de $\sqrt{n}$, on a :

$E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < E(\sqrt{n}) + 1. \Rightarrow E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$ (*) [1 pt]

Par définition de la partie entière de $\sqrt{n} - 1$, on a :

$E(\sqrt{n} - 1) \leq \sqrt{n} - 1 < E(\sqrt{n} - 1) + 1 = E(\sqrt{n}) \Rightarrow \sqrt{n} - 1 < E(\sqrt{n})$ (**)

D'après (*) et (**), on a : $\sqrt{n} - 1 < E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$ [1 pt]

$\Leftrightarrow (\sqrt{n} - 1)^2 < [E(\sqrt{n})]^2 \leq (\sqrt{n})^2$, car $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{n} - 1)^2}{n} < \frac{[E(\sqrt{n})]^2}{n} \leq \frac{(\sqrt{n})^2}{n}$, car $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow \frac{n - 2\sqrt{n} + 1}{n} < v_n \leq \frac{n}{n}$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} < v_n \leq 1$, car $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n})^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1$ [0^5 pt]

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) = 1$. D'après le théorème des « gendarmes »,

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$. [0^5 pt]

Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et converge vers $l = 1$.

Exercice 2 [11,5 pts]

1) Calculons la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

Posons $f(x) = \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \dfrac{e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} - e}{x} = \dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - e}{x}$

D'après la formule de Taylor-Young, le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Ainsi, $f(x) = \dfrac{e^{\frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x}} - e}{x} = \dfrac{e^{1 - \frac{x}{2} + o(x^2)} - e}{x} = \dfrac{e \cdot e^{-\frac{x}{2} + o(x^2)} - e}{x}$ [1 pt]

D'après la formule de Taylor-Young, le développement limité de $e^{-\frac{x}{2}}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit : $e^{-\frac{x}{2}} = 1 + \dfrac{(-\frac{x}{2})}{1!} + \dfrac{(-\frac{x}{2})^2}{2!} + o(x$

Ainsi, $f(x) = \dfrac{e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) - e}{x} = \dfrac{e - \frac{e}{2}x + \frac{e}{8}x^2 + o(x^2) - e}{x}$

$f(x) = -\frac{e}{2} + \frac{e}{8}x + o(x^2)$ [1 pt]

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(-\frac{e}{2} + \frac{e}{8}x + o(x^2)\right) = -\frac{e}{2}$.

D'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2}$. [1,5 pt]

2) Calculons la dérivée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) de la fonction f_k définie par : $f_k(x) = \sin(x)\, e^{kx}$, $k \in \mathbb{N}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, f_k est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions n fois dérivables.

Posons $g(x) = \sin(x)$ et $h_k(x) = e^{kx}$

On a : [1 pt] $\begin{cases} g'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ g''(x) = -\sin(x) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\ \vdots \\ g^{(n-1)}(x) = \sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \\ g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

De même, on a : [1 pt] $\begin{cases} h_k'(x) = k e^{kx} \\ h_k''(x) = k^2 e^{kx} \\ \vdots \\ h^{(n-1)}(x) = k^{n-1} e^{kx} \\ h^{(n)}(x) = k^n e^{kx} \end{cases}$

D'après la formule de Leibniz, on a : $f_k^{(n)}(x) = \left(g(x)\, h_k(x)\right)^{(n)} = \sum C_n^i\, g^{(i)}(x)\, h_k^{(n-i)}(x)$

Ainsi, $f_k^{(n)}(x) = C_n^0 g^{(0)}(x) h_k^{(n)}(x) + C_n^1 g^{(1)}(x) h_k^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n^n g^{(n)}(x) h_k^{(0)}(x)$ [0^5 pt]

D'où $f_k^{(n)}(x) = k^n \sin(x) e^{kx} + n k^{n-1} \sin(x+\frac{\pi}{2}) e^{kx} + \cdots + \sin(x+n\frac{\pi}{2}) e^{kx}$ [1 pt]

3) Soit g la fonction réelle définie par : $g(x) = \cos(\arctan(x))$.

(a) Déterminons D_g, le domaine de définition de g.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in D_g \iff x \in \mathbb{R}$, car $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

D'où $D_g = \mathbb{R}$. [1 pt]

(b) Simplifions $g(x)$.

Soit $x \in D_g = \mathbb{R}$. On a : $1+\tan^2(\arctan(x)) = 1 + \dfrac{\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}$

$$1+\tan^2(\arctan(x)) = \frac{\cos^2(\arctan(x)) + \sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}$$

$$1+\tan^2(\arctan(x)) = \frac{1}{\cos^2(\arctan(x))} \quad \text{car } \cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$$

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}$$ [1 pt]

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{car } \tan(\arctan(x)) = x$$

$$|\cos(\arctan(x))| = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$$ [1 pt]

$$\cos(\arctan(x)) = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$$ car sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\cos(\arctan(x)) > 0$ puisque $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

D'où $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. [1^5 pt]