UNIVERSITÉ D'ÉBOLOWA
ISABEE
Niveau 1- Semestre 2 : 2023-2024
Filières : AESH, ARCH, ERPE, FSTB, GH, GR, HSTE, MC, SE
Durée : 2h

Contrôle continu d'Analyse Réelle 2

Exercice 1 (10 pts)

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$. [5,5 pts]
   En utilisant les sommes de Riemann, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (***Indication** : Penser au calcul de* $\ln(u_n)$).
2. On donne la fonction rationnelle f définie sur $\mathbb{R}^* - \{2\}$ par : $f(x) = \frac{1}{2x - x^2}$.
   (a) Décomposer $f(x)$ en éléments simples. [1,5 pts]
   (b) En déduire le calcul de la primitive suivante : $I = \int f(x)\, dx$. [3 pts]

Exercice 2 (10 pts)

1. Calculer l'intégrale suivante : $J_1 = \int_0^1 \frac{ch(x)}{ch(x) + sh(x)}\, dx$. [3 pts]
2. Étudier la convergence de l'intégrale généralisée : $J_2 = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^3} dx$. [3 pts]
3. Un corps de masse m en chute libre subit une force de freinage : $\vec{F} = -k\vec{v}$. La relation fondamentale de la dynamique donne : (E) : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$ où $v = ||\vec{v}||$, k une constante non nulle et $g = 9,81$.
   Résoudre l'équation différentielle (E). [4 pts]

UNIVERSITÉ D'ÉBOLOWA
ISABEE
Niveau 1- Semestre 2 : 2023-2024
Filières : AESH, ARCH, ERPE, FSTB, GH, GR, HSTE, MC, SE
Durée : 2h

Contrôle continu d'Analyse Réelle 2

Exercice 1 (10 pts)

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.
   En utilisant les sommes de Riemann, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (***Indication** : Penser au calcul de* $\ln(u_n)$).
2. On donne la fonction rationnelle f définie sur $\mathbb{R}^* - \{2\}$ par : $f(x) = \frac{1}{2x - x^2}$.
   (a) Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
   (b) En déduire le calcul de la primitive suivante : $I = \int f(x)\, dx$.

Exercice 2 (10 pts)

1. Calculer l'intégrale suivante : $J_1 = \int_0^1 \frac{ch(x)}{ch(x) + sh(x)}\, dx$.
2. Étudier la convergence de l'intégrale généralisée : $J_2 = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^3} dx$.
3. Un corps de masse m en chute libre subit une force de freinage : $\vec{F} = -k\vec{v}$. La relation fondamentale de la dynamique donne : (E) : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$ où $v = ||\vec{v}||$, k une constante non nulle et $g = 9,81$.
   Résoudre l'équation différentielle (E).

Université d'Ebolowa

ISABEE

Tronc Commun : Niveau 1

Semestre 2 : 2023-2024

Correction du Contrôle Continu d'Analyse Réelle 2

sur 20 points

Exercice 1 [10 pts]

1) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

En utilisant les sommes de Riemann, calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a : $\ln(u_n) = \ln\left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\left[\ln((2n)!) - \ln(n^n n!)\right]$ [1pt]

$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= \frac{1}{n}\left[\ln((2n)!) - \ln(n!) - \ln(n^n)\right]\\
&= \frac{1}{n}\left[\ln((2n)!) - \ln(n!) - n\ln(n)\right]\\
&= \frac{1}{n}\Big[\ln(2n\times(2n-1)\times\dots\times n\times(n-1)\times\dots\times 1) - \ln(n\times(n-1)\times\dots\times 1) - \underbrace{(\ln(n)+\dots+\ln(n))}_{n \text{ fois}}\Big]\\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k) + \sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n}\ln(n)\right]\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln(n+k) - \ln(n)\right] \quad [1\text{pt}]\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right), \text{ car } \ln(n+k)-\ln(n) = \ln\left(\frac{n+k}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\\
&= \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{(1-0)}{n}\right) \quad \text{avec } f(x) = \ln(1+x),\\
&\qquad a = 0 \text{ et } b = 1. \quad [1\text{pt}]
\end{aligned}$$

Ainsi, $\ln(u_n)$ définie une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ et définie par : $f(x) = \ln(1+x)$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \Big[(x+1)\ln(x+1) - (x+1)\Big]_0^1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n) = 2\ln(2) - 2 - (\ln(1)-1) = 2\ln(2) - 1$ [1,5 pt]

[1pt]

On déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln(u_n)} = e^{2\ln(2)-1} = \dfrac{e^{2\ln(2)}}{e} = \dfrac{e^{\ln(2^2)}}{e} = \dfrac{2^2}{e} = \dfrac{4}{e}$.

2) On donne la fonction rationnelle f définie sur $\mathbb{R}^*-\{2\}$ par :
$f(x)=\dfrac{1}{2x-x^2}$.

(a) Décomposons $f(x)$ en éléments simples.

On a : $$f(x)=\frac{1}{2x-x^2}=\frac{1}{x(2-x)}=\frac{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x}{x(2-x)}=\frac{\frac{1}{2}(2-x+x)}{x(2-x)}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{2-x}{x(2-x)}+\frac{x}{x(2-x)}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}\right)$$

D'où
$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}\right).\quad [1^5 pt]$$

(b) Déduisons-en le calcul de la primitive suivante : $I=\int f(x)dx$.

On a : $$I=\int f(x)dx=\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\ln|x|+\ln|2-x|\right]+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

D'où $$I=\frac{1}{2}\left(\ln|x|+\ln|2-x|\right)+c,\quad c\in\mathbb{R}.\quad [3 pts]$$

Exercice 2 [10 pts]

1) Calculons l'intégrale suivante : $J_1=\displaystyle\int_0^1\frac{ch(x)}{ch(x)+sh(x)}dx$.

On a : $$J_1=\int_0^1\frac{ch(x)}{ch(x)+sh(x)}dx=\int_0^1\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}}dx=\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2e^x}dx\quad [1 pt]$$

$$J_1=\int_0^1\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^{-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1+e^{-2x})dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$

$$J_1=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}e^{-2}-\left(0-\frac{1}{2}e^0\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{e^{-2}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{e^{-2}}{2}\right)$$

D'où $$J_1=\frac{3}{4}-\frac{e^{-2}}{4}=\frac{3-e^{-2}}{4}.\quad [2 pts]$$

) Etudions la convergence de l'intégrale généralisée : $J_2=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin(t)|}{t^3}dx$

On a : $\forall t\in[1;+\infty[,\quad 0\leq\dfrac{|\sin(t)|}{t^3}\leq\dfrac{1}{t^3}$ car $|\sin(t)|\leq 1$. [1pt]

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^3}$ est une intégrale généralisée de Riemann convergente car $\alpha=3>1$.

Donc $J_2 = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^3} dt$ est convergente car elle est positive et inférieure à une intégrale généralisée convergente. [2 pts]

3) Un corps de masse m en chute libre subit une force de freinage $\vec{F} = -k\vec{v}$. La relation fondamentale de la dynamique donne (E): $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$ où $v = \|\vec{v}\|$, k une constante non nulle et $g = 9{,}81$.

Résolvons l'équation différentielle (E).

* Solution générale de l'équation homogène : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = 0$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = 0 \iff \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt \implies v_h(t) = A e^{-\frac{k}{m}t}, \quad A \in \mathbb{R}. \text{ [1pt]}$$

* Solution particulière de (E)

Le second membre $g = 9{,}81$ étant une constante, on cherche une solution particulière sous la forme d'une constante $v_p(t) = a$.

Donc $v_p'(t) = 0$. En remplaçant dans (E), on obtient :

$$0 + \frac{k}{m} a = g \iff a = \frac{mg}{k} = \frac{9{,}81m}{k}.$$

D'où $v_p(t) = \frac{9{,}81m}{k}$. [1 pt]

* Solution générale de (E).

On a : $v(t) = v_h(t) + v_p(t) = \overbrace{A e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{9{,}81m}{k}}^{[1pt]}$, $A \in \mathbb{R}$.

Sachant qu'à l'instant initiale, $v(0) = 0$, donc $A e^{-\frac{k}{m}\times 0} + \frac{9{,}81m}{k} = 0$

c'est-à-dire, $A = -\frac{9{,}81m}{k}$ car $e^{-\frac{k}{m}\times 0} = e^0 = 1$.

D'où $\underbrace{v(t) = -\frac{9{,}81m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{9{,}81m}{k} = \frac{9{,}81m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)}_{[1pt]}$.