Université de Maroua
ENSPM
ESB 1-Groupe A/MCHP/AHN

Dr. GUIEM Richard
Durée : 1h30
Semestre 1 : 2023-2024

MATHÉMATIQUES POUR INGÉNIEUR 1 (ESB 111)

Partie : Analyse 1 (20 points) 22 pts

Exercice 1 ~~(10 pts)~~ [11 pts]

1. Let A and B be two nonempty bounded sets of positive real numbers. Define the set $A.B = \{ab : a \in A,\, b \in B\}$.
   (a) Show the existence of $\sup(A)$, $\sup(B)$ and $\sup(A.B)$. [2 pts]
   (b) Show that $\sup(A.B) = \sup(A).\sup(B)$. [3^{5} pts]
2. Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2-2}{2u_n}$.
   (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée. Conclure. [4 pts]
   (b) Calculer sa limite. [1^{5} pt]

Exercice 2 ~~(10 pts)~~ [11 pts]

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. [3 pts]
2. Simplifier l'écriture : $g(x) = argth\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$. [2^{5} pts]
3. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n e^{-x}$, où $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la dérivée k−ième de f_n s'écrit : $f_n^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x}$ où P_k est une fonction polynôme à déterminer. [4 pts]
   (b) En déduire $P_k(0)$, pour $k \leqslant n$. [1^{5} pt]

Université de Maroua
ENSPM
ESB 1-Groupe A/MCHP/AHN

Dr. GUIEM Richard
Durée : 1h30
Semestre 1 : 2023-2024

MATHÉMATIQUES POUR INGÉNIEUR 1 (ESB 111)

Partie : Analyse 1 (20 points)

Exercice 1 (10 pts)

1. Let A and B be two nonempty bounded sets of positive real numbers. Define the set $A.B = \{ab : a \in A,\, b \in B\}$.
   (a) Show the existence of $\sup(A)$, $\sup(B)$ and $\sup(A.B)$.
   (b) Show that $\sup(A.B) = \sup(A).\sup(B)$.
2. Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2-2}{2u_n}$.
   (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée. Conclure.
   (b) Calculer sa limite.

Exercice 2 (10 pts)

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
2. Simplifier l'écriture : $g(x) = argth\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.
3. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n e^{-x}$, où $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la dérivée k−ième de f_n s'écrit : $f_n^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x}$ où P_k est une fonction polynôme à déterminer.
   (b) En déduire $P_k(0)$, pour $k \leqslant n$.

Correction de l'Examen d'Analyse 1

ESB1 - Groupe A/MC/AHN

Semestre 1 : 2023-2024

sur 22 points

Exercice 1 [11 pts]

1) Soient A et B deux sous-ensembles non vides et bornés de $\mathbb{R}_+$.
On définit l'ensemble $A.B$ par $A.B = \{ab : a \in A \text{ et } b \in B\}$.

(a) Montrons l'existence de $\sup(A)$, $\sup(B)$ et $\sup(A.B)$.

- A étant une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}_+$, est majorée dans $\mathbb{R}$. D'après l'axiome de la borne supérieure, $\sup(A)$ existe. [0,75 pt]
- B étant une parte non vide et bornée de $\mathbb{R}_+$, est majorée dans $\mathbb{R}$. D'après l'axiome de la borne supérieure, $\sup(B)$ existe. [0,75 pt]
- Le produit $A.B$ est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}_+$. Donc $A.B$ est majorée dans $\mathbb{R}$. D'après l'axiome de la borne supérieure, $\sup(A.B)$ existe. [0,5 pt]

(b) Démontrons que $\sup(A.B) = \sup(A).\sup(B)$.

- Démontrons que $\sup(A.B) \leq \sup(A).\sup(B)$

[1,5 pt]

Par définition de la borne supérieure, on a :

$\forall a \in A, \quad a \leq \sup(A) \quad$ et $\quad \forall b \in B, \quad b \leq \sup(B)$

Ainsi, $\forall ab \in A.B, \quad ab \leq \sup(A).\sup(B) \quad$ car $A, B \subseteq \mathbb{R}_+$.

Donc $\sup(A.B) \leq \sup(A).\sup(B)$ (*), car $\sup(A).\sup(B)$ est un majorant de $A.B$ dans $\mathbb{R}_+$ (et donc dans $\mathbb{R}$).

- Démontrons que $\sup(A).\sup(B) \leq \sup(A.B)$

[1,5 pt]

Par définition de la borne supérieure, on a :

$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad ab \leq \sup(A.B)$

$\Longleftrightarrow \forall a \in A \quad a \leq \dfrac{\sup(A.B)}{b} \quad$ car $B \subseteq \mathbb{R}_+$.

$\Longrightarrow \forall b \in B \quad \sup(A) \leq \dfrac{\sup(A.B)}{b} \quad$ car $\dfrac{\sup(A.B)}{b}$ est un majorant de A dans $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \quad b \leq \dfrac{\sup(A.B)}{\sup(A)}$ c'est-à-dire que $\dfrac{\sup(A.B)}{\sup(A)}$ est un majorant de B dans $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \sup(B) \leq \dfrac{\sup(A.B)}{\sup(A)}$.

Donc $\sup(A).\sup(B) \leq \sup(A.B)$ $(**)$.

D'après $(*)$ et $(**)$, $\sup(A.B) = \sup(A).\sup(B)$. $[0^5 pt]$

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n}.$$

(a) Démontrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée.

i). Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée

Pour cela, raisonnons par récurrence sur n pour montrer que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, on a : $u_1 = 2 > 0$

5 $[pt]$ Supposons $u_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et démontrons que $u_{n+1} > 0$.

On a : $u_{n+1} = u_n - \dfrac{u_n^2 - 2}{2u_n} = \dfrac{2u_n^2 - u_n^2 + 2}{2u_n} = \dfrac{u_n^2 + 2}{2u_n} > 0$ car $u_n > 0$.

On conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0 car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$

ii) Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit de démontrer que $u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$.

On a : $u_{n+1} = u_n - \dfrac{u_n^2 - 2}{2u_n} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -\dfrac{u_n^2 - 2}{2u_n}$

$[pt]$ D'après ce qui précède, on a montré que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi le dénominateur $2u_n > 0$. Pour que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ il suffit que $-(u_n^2 - 2) \leq 0$, c'est-à-dire, $u_n^2 - 2 \geq 0$.

Montrons en raisonnant par récurrence que $u_n^2 - 2 \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, on a : $u_1^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2 \geq 0$.

Supposons $u_n^2 - 2 \geq 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et démontrons que $u_{n+1}^2 - 2 \geq 0$.

D'après i), on a : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2}{2u_n} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n^2 + 2}{2u_n}\right)^2 = \dfrac{u_n^4 + 4u_n^2 + 4}{4u_n^2}$

$$u_{n+1}^2 - 2 = \frac{u_n^4 + 4u_n^2 + 4 - 8u_n^2}{4u_n^2} = \frac{u_n^4 - 4u_n^2 + 4}{4u_n^2} = \frac{(u_n^2-2)^2}{4u_n^2} \geq 0 \quad \text{car } (u_n^2-2)^2 \geq 0 \text{ et } 4u_n^2 > 0$$

Donc $u_{n+1}^2 - 2 \geq 0$. [0^5pt]

D'où $u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

iii) Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée, on conclut qu'elle est convergente. [0^5pt]

(b) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Notons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. D'après 2), (a), i) on a: $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+2}{2u_n}$

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l, on a:

$$l = \frac{l^2+2}{2l} \iff 2l^2 = l^2 + 2 \iff l^2 = 2 \iff l = \sqrt{2} \text{, car } l \geq 0.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = \sqrt{2}$. [$1^5$pt]

Exercice 2 [11 pts]

1) Calculons: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left[\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)}$$

Calculons le développement limité de $x \longmapsto \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0. [0^5pt]

D'après la formule de Taylor-Young, le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\tan(x)$ s'écrit: $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \theta(x^3)$.

Ainsi, celui de $\frac{\tan(x)}{x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit:

$$\frac{\tan(x)}{x} = \frac{x + \frac{x^3}{3} + \theta(x^3)}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + \theta(x^2) \quad [1\text{ pt}]$$

Donc $\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{3} + \theta(x^2)\right) = \ln(1+X)$ où $X = \frac{x^2}{3} + \theta(x^2)$

D'après Taylor-Young, le développement limité de $\ln(1+X)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit: $\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \theta(X^2) = \frac{x^2}{3} - \frac{\left(\frac{x^2}{3}\right)^2}{2} + \theta(x^4)$

$$= \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{18} + \theta(x^4)$$

Donc $\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right) = \frac{\ln(1+X)}{\ldots} = \frac{\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{18} + \theta(x^4)}{\ldots} = \frac{1}{\ldots} - \frac{x^2}{\ldots} + \theta(x^2) \ldots$

D'où $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{3}-\frac{x^2}{18}} = e^{\frac{1}{3}}$. [1 pt]

2) Simplifions l'écriture : $g(x) = \operatorname{argth}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

Soit $x\in\mathbb{R}$. $x\in D_g \iff \frac{x^2-1}{x^2+1}\in]-1;1[\iff -1<\frac{x^2-1}{x^2+1}<1 \iff x\neq 0 \iff D_g=\mathbb{R}^*$.

Car, en effet $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $-x^2-1<x^2-1<x^2+1 \Rightarrow -\frac{x^2+1}{x^2+1}<\frac{x^2-1}{x^2+1}<\frac{x^2+1}{x^2+1}$

$\iff -1<\frac{x^2-1}{x^2+1}<1$ [0^5pt]

On a : $\forall x\in]-1,1[$, $\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. ← [$0^5$pt]

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $g(x) = \operatorname{argth}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{x^2-1}{x^2+1}}{1-\frac{x^2-1}{x^2+1}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2)$

D'où $g(x) = \ln(x^2)^{\frac{1}{2}} = \ln|x|$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$. ← [1^5pt]

3) Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n e^{-x}$, où $n\in\mathbb{N}$.

(a) $\forall k\in\mathbb{N}$, montrons que $f_n^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x}$ où P_k est une fonction polynôme à déterminer.

Posons $g_n(x) = x^n$ et $h(x) = e^{-x}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. f_n est k-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car g et h sont k-fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

[1pt]

On a : $g_n'(x) = nx^{n-1}$; $g_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}$; $\dots$; $g_n^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$.

$h'(x) = -e^{-x}$; $h''(x) = e^{-x}$; $\dots$; $h^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$.

D'après la formule Leibniz, on a : $f_n^{(k)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i\, g_n^{(i)}(x)\cdot h^{(k-i)}(x)$ [1pt]

$f_n^{(k)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i\, g_n^{(i)}(x)\, h^{(k-i)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i \frac{n!}{(n-i)!}x^{n-i}(-1)^{k-i}e^{-x}$

Pour $k\leq n$, on a : $f_n^{(k)}(x) = \left(\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i\frac{n!}{(n-i)!}x^{n-i}\right)e^{-x}$

Pour $k>n$, on a : $f_n^{(k)}(x) = \left(\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^{k-i}C_k^i\frac{n!}{(n-i)!}x^{n-i}\right)e^{-x}$ car pour $i>n$ $(x^n)^{(i)}=0$

[1pt]

D'où $P_k(x) = \sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i\frac{n!}{(n-i)!}x^{n-i}$ pour $k\leq n$ et [1 pt] $P_k(x) = \sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^{k-i}C_k^i\frac{n!}{(n-i)!}x^{n-i}$ pour $k>n$.

(b) Déduisons-en $P_k(0)$, pour $k\leq n$.

Pour $k\leq n$, on a : $P_k(x) = \sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i\frac{n!}{(n-i)!}x^{n-i}$.

[0^5pt]

pour $k<n$, on a $n-i>0$, $\forall i\in\{0,\dots,k\}$ et par conséquent $P_k(0)=0$.

[1pt]

Pour $k=n$, on a : $P(x) = n! + \sum\limits^{n-1}(-1)^{n-i}C^i\, n!\, x^{n-i} \Rightarrow P(0) = n!$ car $x^{n-i}=0$.