Université de Maroua
ENSPM
INFOTEL 4 (DSC/GLO/RTE/SEC/)

Dr. Guiem Richard
Analyse Numérique 2
Semestre 8 : 2023-2024

Fiche de TPE/TP

Consignes

1. *Les TPE/TP se feront par filière (DSC, GLO, RTE, SEC).* Les TP doivent obligatoirement être saisis.
   Toute requête relevant l'oubli d'un nom après soumission du travail sera non fondée !
2. *Les délégués des différentes filières me feront parvenir les travaux par email, le vendredi 07 juin 2024 à 13h00, à l'adresse qui leur sera communiquée.*
   Les travaux identiques ou soumis hors délai seront sanctionnés !

Exercice 1 (TPE)

On cherche à calculer l'importance, représentée par une note ou indice, d'une série de pages web. On rappelle que l'indice d'importance d'une page B est donnée par la formule suivante :

$$PR(B) = 0,2 + 0,8\left(\frac{PR(B_1)}{N(B_1)} + \cdots + \frac{PR(B_{k(B)})}{N(B_{k(B)})}\right)$$

où les B_i, $1 \leq i \leq k(B)$ désignent les pages qui ont un lien pointant vers B et $N(B_i)$ est le nombre de liens de la page B_i. On considère le cas de quatre pages B_1, B_2, B_3 et B_4 où la page B_1 pointe vers les pages B_2, B_3 et B_4, la page B_2 pointe vers B_1, B_3 et B_4, la page B_3 pointe vers B_1, B_2 et B_4 et la page B_4 pointe vers B_1, B_2 et B_3.

1. Écrire le système linéaire lié au cas considéré ci-dessus, où l'inconnue est le vecteur $x = (PR(A)\ PR(B)\ PR(C)\ PR(D))^T$.
2. Étendre la question précédente à n pages web, c'est-à-dire au cas où pour tout indice $1 \leq i \leq n$, la page B_i pointe vers les $n-1$ autres pages $B_1, B_2, \cdots B_{i-1} B_{i+1}, \cdots, B_n$.
3. Montrer que les valeurs propres de la matrice d'ordre n
$$\begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix}$$
sont égales à $(n-1)a$ et $-a$ (d'ordre de multiplicité $n-1$).
4. Quelle méthode directe utilisera-t-on pour résoudre le système linéaire de la question 2 ?
5. Donner les équations vérifiées par les coeffcients de la matrice L de la factorisation de Cholesky de
$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}.$$
6. Donner un argument simple pour justifer la convergence des méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi appliquées à la matrice obtenue à la question 2. Que vaut le rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode de Jacobi ? Pour $n = 5, 10, 20$ et 40, le rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode de Gauss-Seidel vaut respectivement $0,6461268$; $0,6480678$; $0,6490204$ et $0,6494924$. Quelle méthode préférera-t-on utiliser ?
7. Donner la solution (évidente) du système de la question 2 et commenter le résultat obtenu.

Exercice 2 (TP)

On veut calculer l'unique solution $a = 1$ de l'équation $(E) : e^x(x-1) = 0$ à l'aide d'une méthode numérique.

1. À l'aide du logiciel Scilab, appliquer la méthode des points fixes aux deux fonctions suivantes :
   $g_1(x) = \ln(xe^x)$ *et* $g_2(x) = \dfrac{e^x + x}{e^x + 1}$ avec $\epsilon = 10^{-10}$, $N = 100$ et $x_0 = 2$.
2. Quels constats faites-vous ? (convergence, nombre d'itérations, ...)
3. On veut accélerer la convergence vers la solution de l'équation (E) en utilisant la méthode d'Aitken.
   (a) Écrire l'algorithme d'Aitken.
   (b) À l'aide du logiciel Scilab, résoudre (E) en appliquant la méthode d'Aitken aux deux fonctions g_1 et g_2 avec $\epsilon = 10^{-10}$, $N = 100$ et $x_0 = 2$. Quelle conclusion faites-vous ?

NB *: Les fichiers SciNotes doivent être transmis comme joints au TP.*