Université de Maroua

ENSPM

ESB 1-Groupe A/MC & AHN

Semestre 1: 2024-2025

Correction de l'Examen de Rattrapage d'Analyse 1

[20 pts]

Exercice 1 [10 pts]

1. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}_+$.

(a) **Définition d'un infimum.** Soit A une partie minorée de $\mathbb{R}$. On appelle infimum ou borne inférieure de A dans $\mathbb{R}$, s'il existe, le plus grand des minorants de A dans $\mathbb{R}$. [1 pt]

Caractérisation de la borne inférieure de A. $m \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de A dans $\mathbb{R}$ si et seulement si on a à la fois :

(i) $\forall a \in A, m \leq a$, ie m est un minorant de A dans $\mathbb{R}$. [0,5 pts]

(ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, a \in A /\, a < m + \varepsilon$, c'est-à-dire que $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A dans $\mathbb{R}$. [1,5 pt]

(b) **Montrons que** $\inf(A - B) \geq \inf(A) - \sup(B)$.

Existence de $\inf(A - B)$, $\inf(A)$ et $\sup(B)$.
A et B étant deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}_+$, d'après les axiomes de la borne inférieure et de la borne supérieure, $\inf(A - B)$, $\inf(A)$ et $\sup(B)$ existent dans $\mathbb{R}$. [1 pt]

Pour montrer que $\inf(A - B) \geq \inf(A) - \sup(B)$, il suffit de montrer que $\inf(A) - \sup(B)$ est un minorant de $A - B$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, $\forall c \in A - B$, $c \geq \inf(A) - \sup(B)$. [0,5 pt]
(On rappelle que: $A - B = \{a - b :\ a \in A \text{ et } b \in B\}$).

Soit $c \in A - B$. Alors par définition de $A - B$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $c = a - b$.
L'$\inf(A)$ étant un minorant de A dans $\mathbb{R}$, on a: $a \geq \inf(A)$ $(\star)$.
Le $\sup(B)$ étant un majorant de B dans $\mathbb{R}$, on a: $b \leq \sup(B) \iff -b \geq -\sup(B)$ $(\star\star)$.
En faisant $(\star) + (\star\star)$, on obtient: $c = a - b \geq \inf(A) - \sup(B)$.
Donc $\inf(A) - \sup(B)$ est un minorant de l'ensemble $A - B$ dans $\mathbb{R}$.
On conclut que: $\inf(A - B) \geq \inf(A) - \sup(B)$. [2 pts]

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $u_0 = 1$, $\quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Démontrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergence.
Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, c'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$. [0,5 pt]
En raisonnant par récurrence, on a:

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{1}{u_0}\right) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 = u_0.$$

Supposons que $u_n = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et montrons que $u_{n+1} = u_n = 1$.
Par définition de u_{n+1} et d'après l'hypothèse de récurrence, on a: $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1 = u_n$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, on conclut qu'elle est convergente.
[2 pts]

Calculons sa limite.
Puisque toute suite constante converge vers sa valeur, on déduit que : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$. [1 pt]

Remarque: pour $u_0 \neq 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas constante mais converge toutefois vers 1.

Exercice 2 [10 pts]

1. À l'aide des développements limités, calculons : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{x}$.

   D'après la formule de Taylor-Young, les développements limités de $\sin(x)$ et $\ln(1+X)$ à l'ordre 1 au voisinage de 0 s'écrivent: $\sin(x) = x + \theta(x)$ et $\ln(1+X) = X + \theta(X)$. [0,5+0,5=1 pt]
   Ainsi, $\ln(1+\sin(x)) = \sin(x) + \theta(\sin(x)) = x + \theta(x)$.
   Donc $\dfrac{\ln(1+\sin(x))}{x} = \dfrac{x+\theta(x)}{x} = 1 + \theta(1)$.
   D'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{x} = 1$. [2 pts]

2. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\operatorname{argch}(ch(x)) = |x|$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la fonction ch est paire, alors $ch(x) = ch(-x) = ch(|x|)$.
   On rappelle que la fonction: $\operatorname{argch} : [1,\infty[\to [0,\infty[$. Or $ch(x) = ch(|x|) > 1$ car l'image de $[0,+\infty[$ par la fonction continue ch est $[1,+\infty[$. [1 pt]
   Il en résulte que: $\operatorname{argch}(ch(x)) = \operatorname{argch}(ch(|x|)) = |x|$. [2 pts]

3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

   Vérifions si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   Une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si sa dérivée première est continue sur $\mathbb{R}$.
   (i) Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

   ***Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$.**
   f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. [0,5 pt]

   ***Dérivabilité de f en 0.**

   La fonction f est continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = \lim\limits_{x\to 0} |x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right)| \leq \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \implies \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.
   Calculons la dérivée de f en 0 :

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x^3})}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin(\frac{1}{x^3}) = 0.$$

   Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. [1 pt]
   Conclusion 1: la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (ii) Continuité de f' sur $\mathbb{R}$

   La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$ est définie par: $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x^3}) - \frac{3}{x^2}\cos(\frac{1}{x^3}), & x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

   ***Continuité de f' sur $\mathbb{R}^*$.**
   f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit, différence et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. [0,5 pt]

   ***Continuité de f en 0.**
   f' n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ **n'existe pas** à cause du terme $-\frac{3}{x^2}\cos(\frac{1}{x^3})$ dans l'expression de la dérivée. [1 pt]

   Conclusion 2: la fonction f' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas continue en 0.

   Conclusion finale: On déduit des conclusions 1 et 2 que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais f' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. D'où f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. [1 pt]

Université de Maroua **Dr. Guiem Richard**
ENSPM **Durée: 1h30**
ESB 1-Groupe A/MCHP/AHN **Semestre 1: 2024-2025**

Examen de Rattrapage de Mathématiques pour Ingénieur 1 (ESB 111)

Partie: Analyse 1

Exercise 1 (10 pts)

1. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}_+$.
   (a) Définir: l'infimum d'un ensemble et écrire la caractérisation de la borne inférieure de A.
   (c) Montrer que $\inf(A - B) \geq \inf(A) - \sup(B)$.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergence et calculer sa limite.

Exercice 2 (10 pts)

1. À l'aide des développements limités, calculer : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{x}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\operatorname{argch}(ch(x)) = |x|$.
3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

   La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Université de Maroua **Dr. Guiem Richard**
ENSPM **Durée: 1h30**
ESB 1-Groupe A/MCHP/AHN **Semestre 1: 2024-2025**

Examen de Rattrapage de Mathématiques pour Ingénieur 1 (ESB 111)

Partie: Analyse 1

Exercise 1 (10 pts)

1. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}_+$.
   (a) Définir: l'infimum d'un ensemble et écrire la caractérisation de la borne inférieure de A.
   (c) Montrer que $\inf(A - B) \geq \inf(A) - \sup(B)$.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergence et calculer sa limite.

Exercice 2 (10 pts)

1. À l'aide des développement limité, calculer : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{x}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\operatorname{argch}(ch(x)) = |x|$.
3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

   La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? Justifier.